数理解析研究所講究録
206巻 1974年 129-143

Analytic Structure と極大 Ideal の巾

阪大 理 西村 健

§0 序

B を単位元を持つ可換 Banach 環、$\Sigma(B)$ を B 上の multiplicative linear functional の集合とし、$\phi \in B$ を固定して考える。$\mathbb{C}^k$ のある domain の analytic subvariety V と、V から ΣB への連続な（たゞし ΣB には、Gelfand 位相を考える）、one to one map Φ^* が存在して、$0 \in V$、$\Phi^*(0) = \phi$、かつ任意の $b \in B$ に対して、$\hat{b} \circ \Phi^*$ が V 上で正則になるとき、V を（正確には (V, Φ^*) を）'Analytic variety at ϕ' と言う。こゝで $\hat{b}$ は b の Gelfand 変換を表わす。

この Analytic structure について広範囲にわたる報告が、[1]にもあります。こゝでは話題をしぼって、$B_\phi = \ker \phi$ の巾 B_ϕ^n $(n = 1, 2, \cdots)$ と variety at ϕ の $0 \in \mathbb{C}^k$ に於ける次元 $\dim_0 V$ との関係を non-trivialness との関係も含めて、T. Read の結果[2]、を中心に紹介します。

§ 1. 'Analytic variety at ϕ' の存在の十分条件.

$\mathbb{C}^k$ のある domain の subvariety V 上の正則函数全体からなる algebra を $\Theta[V]$ で表わす。次の事柄は容易にわかる。

命題 1.1 準同型 $\Phi: B \to \Theta[V]$ があって、$\Phi(B)$ が、V の点を分離すれば、Φ の dual map を Φ^* としたとき、(V, Φ^*) は analytic variety in $\Sigma(B)$ である。又 $0 \in V$ かつ、任意の $b \in B_\phi$ に対して、$(\Phi b)(0) = 0$ なら (V, Φ^*) は、analytic variety at ϕ である。V 上の sup norm を $\| \cdot \|_V$ であらわすと $\|\Phi(b)\|_V \leq \|b\|$ $(\forall b \in B)$ (証明略)

前にも述べたように、B_ϕ は $\ker \phi$ を表わす。以後 $n = 1, 2, \cdots$ に対して、B_ϕ^n で 'B_ϕ の n 個の元の積' 全体から生成される ideal を表わす。B_ϕ^0 は B と規約する。又 $(B_\phi^n)^-$ でそれぞれの norm closure を表わす。これらも B の ideal である。$R > 0$ に対して $\Delta(R) = \{ z = (z_1, \cdots z_k) \in \mathbb{C}^k ; |z_i| < R \ (i = 1, 2 \cdots k) \}$ とおく.

以下を通して仮定「$w_i + (B_\phi^2)^-$ $(i = 1, 2, \cdots k)$ が vector space $B_\phi / (B_\phi)^-$ を張る」が成立するものとして話を進める.

今 $b \in B$ に対して、$\mathcal{I}_M(b) = \{ f = \sum \alpha_{(i)} z^{(i)} \in \Theta[\Delta(M^{-1})]$; $\sum_{|i| \leq n} \alpha_{(i)} w^{(i)} - b \in (B_\phi^{n+1})^-$ $n = 1, 2, \cdots \}$ とおくと次の事が成立する。(補題 1.1, 定理 1.1 等以下には [2] では implicit であった事柄で表に出してみた事柄もある. 個人的な興味も理由の

一つだが、こゝで得られた variety の dim. を調べるときの取り扱いが簡単になるなどの利点があると思ったからでもある。

補題 1.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \in \Psi_M(a)$, $g \in \Psi_M(b)$ なら $\alpha f + \beta g \in \Psi_M(\alpha a + \beta b)$, $fg \in \Psi_M(ab)$.

証明 $w^{(i)} = w_1^{i_1} \cdots w_r^{i_r} \in (B_\phi^{n+1})^-$ if $|i| \geq n$ を考慮すれば容易にわかる.

次の条件が analytic variety at ϕ の存在の十分条件として考えられる. C1): $\exists M > 0$ s.t. $\Psi_M(b) \neq$ 空 ($\forall b \in B$)

定理 1.1. C1 を仮定して、$V = \{z \in \Delta(M^{-1});\ f(z) = 0\ \forall f \in \Psi_M(0)\}$ とおく. $\forall b \in B$ に対して $f, g \in \Psi_M(b)$ なら $f|_V = g|_V$. $\Phi(b) = f|_V$ とおくと B から $\mathcal{O}[V]$ への準同型 Φ が得られ、Φ の dual map Φ^* は homeomorphism かつ (V, Φ^*) は 'analytic variety at ϕ' である. (証明) $f|_V = g|_V$ であることは補題 1.1 で $a = b$, $\alpha = 1$ $\beta = -1$ とおけばわかる. Φ が準同型であることも補題 1.1 から判る. 座標函数 $\zeta_i \in \Psi_M(w_i)$ より $\sigma \circ \Phi^* = id.$ on V. こゝに σ は $\varphi (\in \Sigma(B)) \longmapsto (\hat{w}_1(\varphi), \cdots \hat{w}_r(\varphi)) (\in \mathbb{C}^r)$ で定義される連続写像. よって Φ^* は homeomorphism. (証明終り). 次の条件 C2) は C1) と同等である.

条件 C2). $\exists M > 0$ s.t. $\forall b \in B$ $\exists C(b) > 0$ s.t $\forall n$, $\exists f_n = \sum_{|i| \leq n} \beta_{(i)} z^{(i)}$ with $f_n(w) = \sum_{|i| \leq n} \beta_{(i)} w^{(i)} \equiv b \mod (B_\phi^{n+1})^-$, $|\beta_{(i)}| \leq C(b)^{|i|}$.

定理 1.2. C1 と C2 は同値である. (証明) C1 ⇒ C2

は明らか．逆に C2) を仮定する．b に対する $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\Delta(M^{-1})$ の任意の compact set 上で有界であるから、ある $f\in\mathcal{O}[\Delta(M^{-1})]$ に広義一様に収束すると考えてよい．以後一般に $g=\sum\gamma_{(i)}z^{(i)}$ に対して $\sum_{|i|\le n}\gamma_{(i)}z^{(i)}$ を $g|_n(z)$ で表わす．$0\in\mathbb{C}^t$ の近傍で正則な函数 h の 0 に於ける germ $\mathfrak{h}$ 全体からなる環 ${}_t\mathcal{O}$ から $B/(B\mathfrak{p}^{n+1})^-$ への $\mathfrak{h}\longmapsto h|_n(w)+(B\mathfrak{p}^{n+1})^-$ で定義される写像は準同型であることがわかるから、その kernel $\mathfrak{J}_n=\{\mathfrak{h}\in{}_t\mathcal{O};\ f|_n(w)\in(B\mathfrak{p}^{n+1})^-\}$ は ${}_t\mathcal{O}$ の ideal. $\mathfrak{f}_n-\mathfrak{f}_{n+k}\in\mathfrak{J}_n\ (k>0)$ $f_n-f_{n+k}\xrightarrow[(k\to\infty)]{広義一様}f_n-f$ と closure of Modules Theorem [3. Th. II D3] により $\mathfrak{f}_n-\mathfrak{f}\in\mathfrak{J}_n$ $\therefore f|_n(w)\equiv f_n|(w)\equiv b \bmod (B\mathfrak{p}^{n+1})^-$ $(\forall n)$ $\therefore f\in\mathfrak{T}_M(b)$ (証明終り).

Read [2] にある条件即ち C2) は見掛上弱い(実は同等)条件 C2') で置き換わる. C2') $\forall b\in B$ $\exists M(b)>0, \exists c(b)>0$ s.t $\forall n$ $\exists f_{b,n}(z)=\sum_{|i|\le n}\beta_{b,n,(i)}z^{(i)}$ with $f_{b,n}(w)-b\in(B\mathfrak{p}^{n+1})^-$, $|\beta_{b,n,(i)}|\le c(b)M(b)^{|i|}$.

定理 1.3. C2) と C2') は同値である. (証明) C2) $\Rightarrow$ C2') は明らか. 逆に C2') を仮定する. $B_{N,C}=\{b\in B;\ \forall n\ \exists f_{n,b}=\sum_{|i|\le n}\beta_{b,n,(i)}z^{(i)}$ s.t. $f_n(w)-b\in(B\mathfrak{p}^{n+1})^-, |\beta_{b,n,(i)}|\le CN^{|i|}\}$ $(N\in Z^+, C>0)$ (Z^+ は正整数の集合) とおく. C2) $\Leftrightarrow$ '$\exists M>0$ s.t. $\bigcup_{C\in Z^+}B_{M,C}=B$' 又 C2') $\Leftrightarrow$ '$\bigcup_{C,N\in Z^+}B_{N,C}=B$' である. $B_{N,C}$ は閉である. 実際、$b_j(\in B_{N,C})\to b$ とすると、$\exists f_{j,n}(z)=\sum_{|i|\le n}\beta_{j,n,(i)}z^{(i)}$ s.t $|\beta_{j,n,(i)}|\le CN^{|i|}$, $f_n(w)-b\in(B\mathfrak{p}^{n+1})^-$.

必要なら部分列を取って、$\beta_{j,n,(i)} \xrightarrow{(j\to\infty)} {}^{\exists}\beta_{n,(i)}$ $({}^{\forall}n)$ としてよい。$f_n(z)=\sum_{|i|\le n}\beta_{n,(i)}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおくと $f_{j,n}(w)-b \xrightarrow{(j\to\infty)} f_n(w)-b$ より $f_n(w)-b\in(B\phi^{n+1})^-$. 明らかに $|\beta_{n,(i)}|\le CN^{|i|}$ ∴ $b\in B_{N,C}$. Baire の Category Theorem と $B_{N,C}$ の凸内性により ${}^{\exists}N_0, {}^{\exists}C_0$ s.t 0 は B_{N_0,C_0} の内点. ∴ ${}^{\forall}b\in B$ に対し ${}^{\exists}k\in Z^+$ s.t $b\in kB_{N_0,C_0}$. 定義より $kB_{N_0,C_0}=B_{N_0,kC_0}$ ∴ $b\in\bigcup_{N,C\in Z^+}B_{N,C}$ (証明終り)

定理1.3から次の事も容易にわかる. $\Phi(b)=\{f\in_{\iota}\Theta\,;\,f|_n(w)\equiv b \mod (B\phi^{n+1})^-\}$ とおく. <u>1.3の系</u> $\Phi(b)\ne$空$({}^{\forall}b\in B)\Rightarrow C1)$成立

<u>定理1.4</u>. 定理1.1で得られた analytic variety at ϕ に対して次が成立する. (U,θ^*) を analytic disc at ϕ (ie $\mathbb{C}^1$ の単位円盤 U から $\Sigma(B)$ への連続写像 θ^* に対して $\hat{b}\circ\theta^*$ が U 上で正則かつ $\theta^*(0)=\phi$ となっている) とすると 0 のある近傍 $U'(\subset U)$ に対して $\theta^*[U]\subset\Phi^*(V)$ (証明). θ^* は $\theta(b)(z)=\hat{b}(\theta^*z)$ によって $\theta\,;\,B\to\Theta[U]$ なる準同型を引きおこす. U' を十分小さくとると, $\sigma(\theta^*(U'))\subseteq\Delta(M^{-1})$ と出来る. (σ の定義は定理1.1の証にある) $f\in\Phi_M(b)$ に対して $b-f|_n(w)\in(B\phi^{n+1})^-$. よって $\theta(b-f|_n(w))$ は $0\in U$ に於ける zero の order が少なくとも $n+1$: $\theta(b-f|_n(w))z=(\theta b)(z)-f|_n(\sigma\theta^*z)\Longrightarrow\theta(b)z-f(\sigma\theta^*z)$ on U' だから $(\theta b)(z)=f(\sigma\theta^*z)$ on U' 特に $f\in\Phi(0)$ に対して $f(\sigma\theta^*z)=(\theta 0)(z)=0$ $({}^{\forall}z\in U')$ よって $\sigma\theta^*(U')\subset V$. ${}^{\forall}z(\in U)$ を固定する. ${}^{\forall}b\in B$ に対して, ${}^{\forall}f\in\Phi(b)$ を

とると $\hat{b}(\theta^* z)=(\theta b)(z)=f(\sigma\theta^* z)=(\Phi b)(\sigma\theta^* z)=\hat{b}(\Phi^*\sigma\theta^* z)$

だから $\theta^*(z)=\Phi^*\sigma\theta^*(z)$. 故に $\theta^*(z)\in\Phi^*(V)$ (証明終り).

定理1.4は、C1(従って C2), C2')によって保証される'analytic variety at ϕ'が、すべての analytic variety at ϕ のうちで'極大'であることを意味している. なお、これ等の条件は w_i ($i=1,\cdots,k$) のとり方に depend しているように見えるが、一組の、$\{w_i+(B\phi^2)^-\}$ が $B\phi/(B\phi^2)^-$ の basis になる様な組について成立していれば、他の $\{w_i'+(B\phi^2)^-\}$ が basis になる組についても成立することがわかっている.

§2 $(B\phi^n)^-$ $n=1,2,\cdots$ と variety の0に於ける次元.

直和 $\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ は $(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ を n 次の homogeneous element 全体と考えると、graded ring になる. この場合 $a+(B\phi^{p+1})^-\in(B\phi^p)^-/(B\phi^{p+1})^-$, と $b+(B\phi^{q+1})^-\in(B\phi^q)^-/(B\phi^{q+1})^-$ の積は $ab+(B\phi^{p+q+1})^-\in(B\phi^{p+q})^-/(B\phi^{p+q+1})^-$ とする. 'well defined' である事は明らか.

§1に於ける様にこゝでも、$\{w_i+(B\phi^2)^-;\ i=1,\cdots,k\}$ が $B\phi/(B\phi^2)^-$ を張ると言う仮定を置く. すると不定元 $X_1,\cdots,X_k$ の $\mathbb{C}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_k]$ から $\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ への'自然な' degree zero の homogeneous homomorphism φ (従って $\varphi(X_i)=w_i+(B\phi^2)^-$) が考えられる. (Graded algebra に関する用語定義は[4]参照)

定理2.1 [S. J. Sidney [5]]. 上に述べた準同型 φ は onto で

ある．(証明省略 [5]参照)

上の定理は $\mathbb{C}[X_1,\cdots X_r]$ の homogeneous ideal J が存在して、$\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ が $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_r]/J$ と同型 ($J=\ker\varphi$) となる事を示しているがその逆をも Sidney は示している．

<u>定理 2.2</u> [5] J を任意の homogeneous ideal in $\mathbb{C}[X_1,\cdots X_r]$ とするとある supnorm algebra A と $\Phi_1\in\Sigma A$ が存在して、$\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_r]/J$ と $\sum_{n=0}^{\infty}\oplus(A\phi_1^n)^-/(A\phi_1^{n+1})^-$ は同型になる．(証明省略)

以下この § では $W_1,\cdots W_k$ について C 1 (又は C 2) C 2′)) が成立していると仮定する．従って定理 1．1 によって analytic variety (V,Φ^*) at ϕ が存在する．この V の原点に於ける次元 $\dim_0 V$ について次の事が成立する．

<u>定理 2.3</u>　a) ある多項式 $\pi(X)$ が存在して十分大きな n に対しては $\pi(n)=\dim(B\phi^n)^-/(B\phi^{n+1})^-$ が成立する． b) $\dim_0 V=(\deg\pi)+1$ ．こゝに $\deg\pi$ は多項式 $\pi(X)$ の次数．たゞし $\deg 0=-1$ と規約する．以下をこの定理の証明にあてる．a) は次による．

<u>定理 2.4</u>　[[4] Theorem 41 in Ch. VII] Hilbert Serre $\mathbb{C}[X_1\cdots X_r]$ から、graded ring $R=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus R_n$ の上への、homogeneous homomorphism φ_R があれば、多項式 $\pi_R(X)$ が存在して $\pi_R(n)=\dim R_n$ が十分大きな n について成立する．

定理 2.3 b) の証明のために次の定理が必要

<u>定理 2.5</u>　定理 2.4 の φ_R の ker を I で表わす．P を I の

isolate ideal として動かしたとき、$\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_t]/P$ の最大の transcendence degree over $\mathbb{C}$ は $(\deg \Pi_R)+1$ である.(証明略. [4] 参照). この定理は実際には次の形で使う. [2] に於ける系を一般的な形で述べておく.

定理 2.5 系　$\deg \Pi_R + 1 = t$ とおく. $\varphi_R(X_1), \cdots \varphi_R(X_t)$ のうち t 個の元の組があって(それを簡単のために $\varphi_R(X_1) \cdots \varphi_R(X_t)$ とする) 任意の n に対してそれ等の n 次の単項式が R_n で一次独立である. かつ $t+1$ 個からなるこの様な組はない. (言い換えると $\varphi_R(X_1), \cdots \varphi_R(X_r)$ のうち代数的に独立な極大な組は t 個の元からなる). (定理 2.5 ⇒ 定理 2.5 系の証) P を I に属する isolated prime ideal で $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_t]/P$ の $\mathbb{C}$ 上の transcendence degree が t のものとする. $\mathbb{C}[X_1 \cdots X_r]/P = \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_r]$. ($Y_i$ は X_i の P residue) $\ker \varphi_R = I \subset P$ ゆえ R から $\mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_r]$ 上への自然な homogeneous homomorphism φ' が存在して $\varphi'(\varphi_R(X_i)) = Y_i$ $(i=1, \cdots, t)$ $Y_1, \cdots, Y_t$ を $\mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_r]$ の $\mathbb{C}$ 上での transcendence basis としてよい. 今、ある n に対して一次従属関係 $\sum_{|i|=n} \alpha_{(i)} \varphi_R(X_1)^{i_1} \cdots \varphi_R(X_t)^{i_t} = 0$ ($\exists \alpha_{(i)} \neq 0$) があれば、$\varphi'$ を両辺に施して $\sum \alpha_{(i)} Y_1^{i_1} \cdots Y_t^{i_t} = 0$ これは矛盾. 又 $t+1$ 個以上の元からなるその様な組があればそれ等の n 次単項式は ${}_{n+t}C_n$ 個以上あるから十分大きな n に対して $\Pi_R(n) = \dim R_n \geq {}_{n+t}C_n$. 両辺の n に関する次数はそれぞれ $t-1$, t だから矛盾. (証明終り)

定理2.3bの証明）$(\deg \pi)+1=s$ とおく．まず $\dim_0 V \geq s$ を示す．$\mathfrak{I}$ を C1）に於ける $\mathfrak{F}_M(0)$ に属す函数の germ から生成される ${}_r\mathcal{O}$ の ideal とする．ある coordinate system に関して ${}_s\mathcal{O} \cap \mathfrak{I}=\{0\}$ になる事を示せばよい．（ここに ${}_s\mathcal{O}$ は'最初の s 変数のみの函数'の germ からなる ${}_r\mathcal{O}$ の subring．詳しくは[3]参照．）実際には $\mathfrak{J}=\{\sum \beta_{(i)} z^{(i)} \in {}_r\mathcal{O}\ ;\ \sum_{|i| \leq n} \beta_{(i)} w^{(i)} \in (B_{\mathfrak{p}}^{n+1})^- \ \forall n\}$ とおくと $\mathfrak{J}=\bigcap_n \mathfrak{J}_n \supset \mathfrak{I}$（$\mathfrak{J}_n$ は定理1.2の証明にある）は明らかだが、これについて $\mathfrak{J} \cap {}_s\mathcal{O}=\{0\}$ が示される．∵定理2.1と定理2.5系により $\varphi(X_1), \cdots, \varphi(X_s)$ の n 次の monomial が各 n に対して一次独立と考えてよい．$f=\sum \beta_{(i)} z^{(i)} \in \mathfrak{J} \cap {}_s\mathcal{O}$ とする．このとき (i) が $(i_1, \cdots i_s, 0, \cdots 0)$ の type でなければ $\beta_{(i)}=0$ である．まず $\sum_{|i|=1} \beta_{(i)} w^{(i)} \in (B_{\mathfrak{p}}^2)^-$ だから $\sum_{|i|=1} \beta_{(i)} \varphi(X_1)^{i_1} \cdots \varphi(X_s)^{i_s}=0$ よって $\beta_{(i)}=0$ if $|i|=1$. 順次 $|i|$ に関する帰納法で任意の (i) に対して $\beta_{(i)}=0$ がわかる．

$\dim_0 V \leq s$ を示すにはさらに次のような準備が必要になる．

${}_r\mathcal{O}$ の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対して ${}_r\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ を考え、$f \in {}_r\mathcal{O}$ の $\mathfrak{p}$ residue を $\tilde{f}$ で表わし、${}_r\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ の極大 ideal を $M_{\mathfrak{p}}$ と書くことにする．$M_{\mathfrak{p}}$ は ${}_r\mathcal{O}$ の極大 ideal M の自然準同型による像である．$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B_{\mathfrak{p}}^n)^-/(B_{\mathfrak{p}}^{n+1})^-$ を構成するのと同じように、graded algebra $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathfrak{p}}^n/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ が考えられ、又 degree 0 の homogeneous homomorphism $\varphi_{\mathfrak{p}} : \mathbb{C}[X_1 \cdots X_r] \to \sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathfrak{p}}^n/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ で natural（従って $\varphi_{\mathfrak{p}}(X_i)=\tilde{z}_i+M_{\mathfrak{p}}^2 \in M_{\mathfrak{p}}/M_{\mathfrak{p}}^2$）なものが得られる．そこで定理2.4を適用して得られる多項式を $\pi_{\mathfrak{p}}$

と以下では表わす．従って十分大きな n に対し $\pi_{\mathfrak{p}} = \dim M_{\mathfrak{p}}^n / M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$.

命題2.1 $\dim \mathfrak{p} = (\deg \pi_{\mathfrak{p}}) + 1$ ($\forall \mathfrak{p}$ 素 ideal in ${}_r\mathcal{O}$)．証明）
$\dim\mathfrak{p} = t'$, $(\deg \pi_{\mathfrak{p}})+1 = t$ とおく．i) $t' \geq t$ を示す．定理2.5系により必要なら $X_1 \cdots X_r$, $z_1 \cdots z_r$ の番号を付けなおして，$\forall n$ に対して $\varphi_{\mathfrak{p}}(X_1), \cdots, \varphi_{\mathfrak{p}}(X_t)$ の n 次単項式が一次独立と考えてよい．これより ${}_t\mathcal{O} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ がわかり，$t' = \dim \mathfrak{p} \geq t$. ii) $t' \leq t$ を示す．まず $t'=1$ のとき $\mathfrak{p} \cap {}_1\mathcal{O} = \{0\}$ と考えてよい．$M_{\mathfrak{p}}^{n+1} \neq M_{\mathfrak{p}}^n$ ($\forall n$) を示せば $\pi_{\mathfrak{p}}(n) \neq 0$ となり $\deg \pi_{\mathfrak{p}} (=t) \geq 0$ がわかる．今 $M_{\mathfrak{p}}^n = M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ ($\exists n$) とすると $z_1^n \in \bigcap_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{p} + M^j)$．よって $\exists f_j \in \mathfrak{p}$ ($\forall j$) s.t. $f_j - z^n$ has total order at least j．故に $f_j \to z_1^n$ simple convergence.
[6]の定理6.3.5により $z_1^n \in \mathfrak{p}$．これは $\mathfrak{p} \cap {}_1\mathcal{O} = \{0\}$ に反する．

$t' \geq 2$ の場合．定理2.5系より $\forall j \leq r$ に対して $\varphi_{\mathfrak{p}}(X_1), \cdots \varphi_{\mathfrak{p}}(X_t), \varphi_{\mathfrak{p}}(X_j)$ は代数的に従属，かつ $\varphi_{\mathfrak{p}}(X_1), \cdots \varphi_{\mathfrak{p}}(X_t)$ は代数的に独立としてよい．$z_t \in \mathfrak{p}$ なら $\varphi_{\mathfrak{p}}(X_t) = 0$ で矛盾．よって $z_t \notin \mathfrak{p}$．今 $\mathfrak{J} = \mathfrak{p} + {}_r\mathcal{O} z_t$ のある同伴素 ideal $\mathfrak{p}'$ に対して，$\dim \mathfrak{p}' = t'-1$．[(6) TR. III C 14]．このとき $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ より $\ker \varphi_{\mathfrak{p}} \subseteq \ker \varphi_{\mathfrak{p}'}$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathfrak{p}}^n/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ から $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathfrak{p}'}^n / M_{\mathfrak{p}'}^{n+1}$ の上への準同型 η が自然に決まり，$\eta\varphi_{\mathfrak{p}}(X_i) = \varphi_{\mathfrak{p}'}(X_i)$ ($i=1,\cdots t$)．また $z_t \in \mathfrak{p}'$ より $\varphi_{\mathfrak{p}'}(X_t) = 0$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[X_1 \cdots X_r] \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{p}}"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathfrak{p}'}"'] & \sum \oplus M_{\mathfrak{p}}^n / M_{\mathfrak{p}}^{n+1} \arrow[d, "\exists\eta"] \\ & \sum \oplus M_{\mathfrak{p}'}^n / M_{\mathfrak{p}'}^{n+1} \end{tikzcd}$$

ゆえに $\forall j$ に対して $\varphi_{\mathfrak{p}'}(X_1), \cdots, \varphi_{\mathfrak{p}'}(X_{t-1})$, $\varphi_{\mathfrak{p}'}(X_j)$ は代数的に従属．ゆえに定理2.5系により $(\deg \pi_{\mathfrak{p}'})+1 \leq t-1$．$t'$ に関する帰納法の仮定に

より、$\dim \mathfrak{p}' = \deg \pi_{\mathfrak{p}'} + 1$ よって $t'-1 \le t-1$. ∴ $t' \le t$.

定理2.3の証明の続き. $\dim_{\mathfrak{J}} V \le s$ を示す. $\mathfrak{J}$ の同件素 ideal $\mathfrak{p}$ で $\dim \mathfrak{p} = \dim_o V$ となるものを考える. 命題2.1により $\dim V = (\deg \pi_{\mathfrak{p}}) + 1$. そこで degree 0 の homogeneous homomorphism θ ; $\sum_{n=0}^{\infty} \oplus (B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}/(B_{\mathfrak{p}}^{n+1})^{-} \to \sum_{n=0}^{\infty} \oplus M_{\mathfrak{p}}^{n}/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ (onto) が存在すれば、十分大きなnについては、$\pi_{\mathfrak{p}}(n) = \dim(M_{\mathfrak{p}}^{n}/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}) - 1 \le \dim (B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}/(B_{\mathfrak{p}}^{n+1})^{-} - 1 = \pi(n)$ だから $\dim \mathfrak{p} = (\deg \pi_{\mathfrak{p}}) + 1 \le (\deg \pi) + 1$. よって $\dim_o V \le (\deg \pi) + 1 = s$.

以下θの構成について、$\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{p}$ に注意すると、homomorphism $\Lambda ; B \to {}_k\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ を $\Lambda(b) = \tilde{f}$ ($f \in \Phi_M(b)$) により定義出来て、$\Lambda(B_{\mathfrak{p}}) \subseteq M_{\mathfrak{p}}$ が成立する. $\Lambda((B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}) \subseteq M_{\mathfrak{p}}^{n}$ が示されゝば、θ_n ; $(B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}/(B_{\mathfrak{p}}^{n+1})^{-} \to M_{\mathfrak{p}}^{n}/M_{\mathfrak{p}}^{n+1}$ linear map ($\forall n$) が構成出来て、これよりθが導かれる. onto は $\Lambda(w_i) = z_i + \mathfrak{p}$ から θ_n が onto になるからわかる.

$\Lambda((B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}) \subseteq M_{\mathfrak{p}}^{n}$ の証明. 明らかに $\Lambda(B_{\mathfrak{p}}^{n}) \subseteq M_{\mathfrak{p}}^{n}$ だから、$\Lambda((B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}) \not\subseteq M_{\mathfrak{p}}^{n}$ なら ${}_k\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ 上の線型汎函数 t で $t|M_{\mathfrak{p}}^{n} = 0$ かつ $\exists \tilde{f} \in \Lambda((B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}) \setminus M_{\mathfrak{p}}^{n}$ に対して $t(\tilde{f}) = 1$ となるものがある. ${}_k\mathcal{O}$ 上の線型汎函数τを $\tau(g) = t(\tilde{g})$ ($\forall g \in {}_k\mathcal{O}$) によって定義する. 列 $\{b_j\} \subseteq (B_{\mathfrak{p}}^{n})^{-}$ で $b_j \to b$ in B ∧ $\Lambda(b) = \tilde{f}$ となるものがある. $f_j \in \Phi_M(b_j)$ ($j=1,2\cdots$) をとると $\tau(f_j) = t(\tilde{f}_j) = 0$ (∵ $\tilde{f}_j = \Lambda(b_j) \in M_{\mathfrak{p}}^{n}$), $\|f_j - f\|_V \le \|\Phi\| \cdot \|b_j - b\| \to 0$. [3] Cor VB4 により $\mathbb{C}^k \ni 0$ のある近傍 W が存在して各 $h \in \mathcal{O}[V]$ に対して $H \in \mathcal{O}[W]$ が存在して $\|H\|_W \le K\|h\|$ かつ $H|_{V\cap W} = h|_{V\cap W}$. 今 $(f_j - f)|_V$ $j=1,2\cdots$ に対して F_j をその様にとれば

、$\|F_j\|_W \leq K\|f_j - f\| \to 0$．$\forall g \in M^n$（$M$は$\mathfrak{G}$の極大ideal）に対して$\tilde{g} \in M_\Phi^n$だから$\tau g = 0$．これよりτは高々order $n-1$のpartial derivativesの一次結合であることがわかる．$\because \|F_j\|_W \to 0$より，$\tau(F_j) \to 0$．一方$(F_j - (f_j - f))|_{V \cap W} = 0$より$F_j - (f_j - f) \in$ ideal of $V \subseteq \Phi$ $\therefore \tau(F_j) = t(\hat{F}_j) = t(\tilde{f}_j - \tilde{f}) = t(\tilde{f}) = 1$．矛盾．

§3 応用、'nontrivialness'など．

定理．3.1．$\dim(B\phi/B\phi^2) < \infty$なら i) analytic variety (V, Φ^*) at ϕが存在して、$\Phi^*(V)$はϕのnorm近傍になる．ii)．Vがnontrivial（ie $\Phi^*(V) \neq \{\phi\}$ 又は $V \neq \{0\}$）である必要十分条件は、$(B\phi^n)^- \neq (B\phi^{n+1})^-$ $(n = 1, 2, \cdots)$

定理 3.2．$B\phi$が有限生成なら i) analytic variety (V, Φ^*) at ϕが存在して、$\Phi^*(V)$はϕのGelfand近傍になる．ii) Vがnontrivialである必要十分条件は$(B\phi^n)^- \neq (B\phi^{n+1})^-$ $(n = 1, 2 \cdots)$．

定理3.1 i)はBrowder [9]の結果で、T. Read [2]にはii)をも含めた証明がtensor積を使ってなされているが長いので省く．定理3.2のi)はGleason [7]で定理3.1 i)以前に知られている．またその簡易化された証明は[8]などにも見られる．ここでは定理3.2 ii)をも含めた証明を、Readの定理3.1の証明の考え方にならってしてみる．

定理3.2の証明．$B\phi = \sum_{i=1}^{r} Bw_i$ $(\exists w_1, \cdots w_r)$とすると、線型写

像 $B\oplus\cdots\oplus B \to B\phi$　$b_1\oplus\cdots\oplus b_r \mapsto \sum_{i=1}^{r} b_i w_i$ が有界で onto だから、$^\exists K>0$ s.t $^\forall b\in B$ $^\exists b_1,\dots,b_r$ with $b-\hat{b}(\phi)=\sum_{i=1}^{r} b_i w_i$ & $\|b_i\|\le K\|b\|$ $(i=1,\dots,r)$．よって帰納法で次の事がわかる．：$^\forall b\in B$ $^\exists\{b_{(i)}\}\subseteq B$ s.t $b=\sum_{|i|<n}\hat{b}_{(i)}(\phi)+\sum_{|i|=n}(b_{(i)}-\hat{b}_{(i)}(\phi))w^{(i)}$ $(^\forall n)$ ——(*) かつ $\|b_{(i)}\|\le (rK)^{|i|}\|b\|$ ——(**)．$n=1$ に於ける (*) により $w_i+(B\phi^2)^-$ $i=1,2\dots r$ が $B\phi/(B\phi^2)^-$ を張ることがわかる．$M=rK$ とおき $^\forall b$ に対して上の $\{b_{(i)}\}$ をとり $f_b(z)=\sum\hat{b}_{(i)}(\phi)z^{(i)}$ とおくと (**) により $|\hat{b}_{(i)}(\phi)|\le M^{|i|}\|b\|$、これと (*) により容易に $f_b(z)\in\Phi_M(b)$ がわかる．$\sigma(\varphi)=(\hat{w}_1(\varphi),\dots,\hat{w}_r(\varphi))$ $(\varphi\in\Sigma B)$ とおくと $N=\sigma^{-1}(\Delta(M^{-1}))$ は ϕ の Gelfand 近傍．$I=\{f_bf_a-f_{ba},\ \alpha f_a+\beta f_b-f_{\alpha a+\beta b}\ ;\ a,b\in B,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}\}$ とおくと補題1.1より $I\subseteq\Phi(0)$ だから $V'\underset{\text{set}}{=}\{z\in\Delta(M^{-1})\,;\ g(z)=0\ ^\forall g\in I\}\supseteq V$（$V$ は定理1.1の variety で $V=\{z\in\Delta(M^{-1})\,;\ g(z)=0\ ^\forall g\in\Phi_M(0)\}$）．$\Phi'\,;\,b\mapsto f_b|_{V'}$ は明らかに準同型だから命題1.1により (V',Φ'^*) は analytic variety at ϕ になる．又 $\Phi'^*|_V=\Phi^*$．定理1.4により V は極大だから（必要なら M を大きくとりなおして）結局 V' と一致する．あとは $N\subseteq\Phi^*(V)$ を言えばよい．*) **) より $^\forall\varphi\in N$ $^\forall b\in B$ に対して $\hat{b}(\varphi)=f_b(\sigma\varphi)$ がわかる．これより $^\forall\varphi\in N$ に対して $\sigma(\varphi)\in V'$（∵ 例えば $(f_bf_a-f_{ba})(\sigma\varphi)=f_a(\sigma\varphi)f_b(\sigma\varphi)-f_{ab}(\sigma\varphi)=\hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi)-(ab)\hat{}(\varphi)=0$ e.t.c.）∴ $\sigma(N)\subset V'=V$．$f_b\in\Phi_M(b)$ だから $f_b|_V=\Phi(b)$．故に $^\forall\varphi\in N$ に対して $(\Phi^*(\sigma\varphi))(b)=f_b(\sigma\varphi)=\hat{b}(\sigma\varphi)=\hat{b}(\varphi)$ $(^\forall b\in B)$ 即ち $\Phi^*(\sigma\varphi)=\varphi$ $(^\forall\varphi$

$\in N$) ∴ $N \subseteq \Phi^*(V)$) (証明終り)

T. Read [2] 以前にも、analytic structure が nontrivial であることと、maximal ideal の巾との関係は Sidney [10], Crownover [11] 等で調べられていた。例えば、A を uniform algebra. $\check{S}(A)$ をその Šilov 境界としたとき、$\check{S}_A$ 上の表現測度が unique な $\varphi \in \Sigma A$ に対して P_φ で φ の属する part を表わせば次が成立する。i) $P_\varphi = \{\varphi\}$ 又は ii) 単位円盤 $D(\subset \mathbb{C}^1)$ から P_φ (ここには $\| \ \|$-topology を入れる)上への同相写像 h があって $h(0)=\varphi$ かつ各 $f \in A$ に対して $\hat{f} \circ h$ は D 上で正則になる。これについて Sidney は [10] で次の結果を示している。

定理 3.3. $\{P_\varphi\} \neq \{\varphi\} \Leftrightarrow A_\varphi \neq (A_\varphi^2) \Leftrightarrow (A_\varphi^n)^- \neq (A_\varphi^{n+1})^-$ ($\forall n$).

文献

(1) 鶴見 and 神保 , Analytic structure について, 数理科学講究録 148 Function algebra, 数理科学刊行会 , 1972.

(2) T.T.Read, Powers of a maximal ideal in a Banach algebra and analytic structure, T.A.M.S. 161, Nov.(1971), 235-248.

(3) R.C.Gunning and H.Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

(4) O.Zariski and P.Samuel, Commutative algebra. Vol.2, University Series in Higher Math., Van Nostrand, Prinston, N.J., 1960.

(5) S.T.Sidney, Properties of the sequence of colsed powers of a sup-norm algebra, T.A.M.S. 131 (1968), 128-148.

(6) L.Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Prinston, N.J., 1966.

(7) A.M.Gleason, Finitely generated ideals in Banach algebrs, J.Math. mech. 13 (1964), 125-132.

(8) A.Browder, Introduction to function algebras, W.A.Benjamin, 1969.

(9) A.Browder, Point derivations and analytic structure in the spectrum of a Banach algebra, J.Functional Analysis 7 (1971), 156-164.

(10) S.J.Sidney, Point derivations in a certain sup-norm algebras, T.A.M.S. 131, (1968), 119-148.

(11) R.M.Crownover, One dimentional point derivation spaces in Banach algebras, Studia Math. 35 (1970), 249-259.